

# FORMULATION LOCALE DE L'ÉLECTROSTATIQUE

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Formulation locale du théorème de Gauss - opérateur divergence</b>	<b>3</b>
I.1	Démonstration	3
I.2	Conséquence : le théorème de Green-Ostrogradski	4
I.3	Signification de la divergence	5
<b>II</b>	<b>Formulation locale de la circulation conservative - opérateur rotationnel</b>	<b>6</b>
II.1	Démonstration	6
II.2	Conséquence : le théorème de Stokes-Ampère	8
II.3	Complément : signification du rotationnel (le radeau de la méduse)	8
<b>III</b>	<b>Les équations locales du potentiel</b>	<b>8</b>
III.1	Préliminaire : l'opérateur Laplacien	8
	a - Laplacien scalaire	8
	b - Laplacien vectoriel	9
III.2	Potentiel en espace chargé : l'équation de Poisson - signification	9
	a - Formulation	9
	b - Exemple de résolution : la diode à vide	10
III.3	Potentiel en espace vide : l'équation de Laplace	11
	a - Formulation - existence et importance du potentiel-unicité	11
	b - Exemple de résolution analytique possible : le cas d'un condensateur cylindrique	12
	c - Exemple de méthode numérique de résolution de l'équation de Laplace : méthode des différences finies appliquée au condensateur plan	13
<b>IV</b>	<b>Analogie électrostatique - gravitation</b>	<b>13</b>
IV.1	Grandeurs analogues - Champ de gravitation	13
IV.2	Potentiel de gravitation	13
IV.3	Théorème de Gauss	14
	a - Enoncé	14

b - Exemple d'exploitation : champ d'une distribution sphérique homogène . . .	15
IV.4 Synthèse locale de l'analogie . . . . .	16

---

# I Formulation locale du théorème de Gauss - opérateur divergence

## I.1 Démonstration

Supposons un volume d'espace  $\mathcal{V}$  de surface fermée  $\mathcal{S}$ , de charge volumique  $\rho(\vec{r})$ . Isolons un petit élément  $d\tau$  de ce volume à l'échelle mésoscopique, de sorte que la grandeur caractérisant la charge demeure la densité volumique de charge  $\rho(\vec{r})$  nivelée à cette échelle (cf précédent chapitre). Par souci de simplification, le volume élémentaire sera "découpé" en coordonnées cartésiennes, soit un "mésocube" de volume  $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$  :

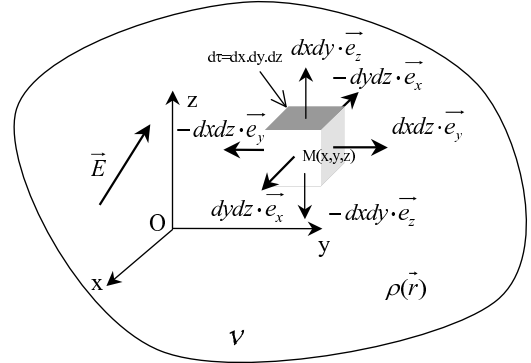


FIGURE X.1 – Flux élémentaire du champ électrique à travers un "cube mésoscopique"

Calculons le flux du champ électrique à travers la surface fermée de ce "mésocube" :

$$\delta\Phi = \oiint_{S \equiv 6 \text{ faces}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\stackrel{1^{\text{er}} \text{ ordre}}{\simeq} [E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)] dy dz + [E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)] dx dz + [E_z(x, y, z+dz) - E_z(x, y, z)] dx dy$$

qui donne en développant au premier ordre chaque terme :

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \oiint_{S \equiv 6 \text{ faces}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx dy dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dx dy dz + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dx dy dz \\ &= \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] \cdot d\tau \quad (1) \end{aligned}$$

En outre, le théorème de Gauss appliqué à ce petit volume donne :

$$\delta\Phi = \oiint_{S \equiv 6 \text{ faces}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\delta Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \cdot d\tau \quad (2)$$

En identifiant les seconds membres des équations (1) et (2) on dégage :

$$\left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

A RETENIR :

On pose alors l'opérateur divergence du champ électrique en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{E} \equiv \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z}$$

et la forme locale du théorème de Gauss :

**PROPRIÉTÉ - (I.1) - 1:**

Un champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est relié à sa source  $\rho(M)$  (charge volumique locale) par le théorème de Gauss sous sa forme locale :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \quad (\text{X.1})$$

*formulation locale du théorème de Gauss ou équation de Maxwell-Gauss*

**REMARQUE - (I.1) - 1:**

L'opérateur divergence peut s'écrire en coordonnées cartésiennes à l'aide de l'opérateur "nabla" :

$$\operatorname{div} \vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \text{avec} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{X.2})$$

On se reportera au fascicule MPP d'analyse vectorielle pour les expressions de la divergence dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

## I.2 Conséquence : le théorème de Green-Ostrogradski

Rappelons l'expression du flux "local" défini précédemment :

$$\delta\Phi = \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau$$

ce qui donne en intégrant le flux sur l'ensemble du volume  $\mathcal{V}$  :

$$\Phi = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau$$

et finalement en détaillant l'expression du flux :  $\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} \cdot d\tau$

On peut généraliser ce résultat à tout champ de vecteur  $\vec{P}$  :

PROPRIÉTÉ - (I.2) - 2:

Tout champ de vecteur  $\vec{P}(x, y, z)$  vérifie la relation suivante pour une surface fermée  $S$  contenant le volume  $V$

$$\oiint_{S/V} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V/S} \text{div} \vec{P} \cdot d\tau \quad (\text{Théorème de Green-Ostrogradski})$$

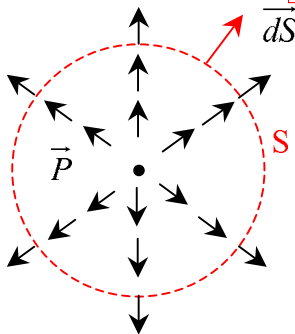
**Exercice de cours:** (I.2) - n° 1 Important!!! A l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, passer de la forme intégrale à la forme locale du théorème de Gauss.

### I.3 Signification de la divergence

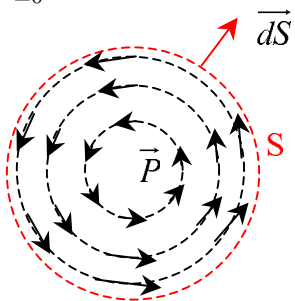
Supposons un champ de vecteur quelconque  $\vec{P}$ . Calculons le flux de  $\vec{P}$  sur une surface fermée  $S$  dans deux cas de champ  $\vec{P}$  d'allure très différente :

- les lignes de champ "fuient" les points  $M$  du volume contenu dans  $S$  :  $\Phi(\vec{P}) = \oiint_S \underbrace{\vec{P} \cdot \vec{n}}_{\neq 0} dS \stackrel{GO}{=} \iiint_{V/S} \text{div}(\vec{P}) \cdot d\tau \neq 0 \implies \boxed{\text{div}(\vec{P}) \neq 0}$

$$\iiint_{V/S} \text{div}(\vec{P}) \cdot d\tau \neq 0 \implies \boxed{\text{div}(\vec{P}) \neq 0}$$



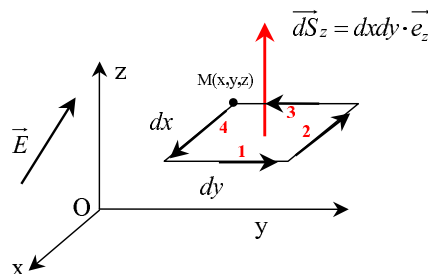
- les lignes de champ restent "confinées" pour tous les points  $M$  du volume contenu dans  $S$  :  $\Phi(\vec{P}) = \oiint_S \underbrace{\vec{P} \cdot \vec{n}}_{=0} dS \stackrel{GO}{=} \iiint_{V/S} \text{div}(\vec{P}) \cdot d\tau = 0 \implies \boxed{\text{div}(\vec{P}) = 0}$



## II Formulation locale de la circulation conservative - opérateur rotationnel

### II.1 Démonstration

Considérons un petit cadre  $d\Gamma$  de dimension mésoscopique d'origine  $M(x, y, z)$ , placé dans un plan parallèle au plan  $(xOy)$  et calculons la circulation élémentaire  $\mathcal{C}$  du champ électrostatique sur ce dernier contour. Pour aborder le calcul, on se placera là-encore en coordonnées cartésiennes.



Exprimons la circulation élémentaire du champ électrostatique sur ce contour fermé :

FIGURE X.2 – Circulation de  $\vec{E}$  sur un contour élémentaire fermé

$$\delta\mathcal{C}_{d\Gamma_{xy}} = \oint_{\text{cadre}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_1 \vec{E} \cdot \underbrace{\vec{dl}}_{=dy \cdot \vec{e}_y} + \int_2 \vec{E} \cdot \underbrace{\vec{dl}}_{=-dx \cdot \vec{e}_x} + \int_3 \vec{E} \cdot \underbrace{\vec{dl}}_{=-dy \cdot \vec{e}_y} + \int_4 \vec{E} \cdot \underbrace{\vec{dl}}_{=dx \cdot \vec{e}_x}$$

$$= E_y(x + dx, y, z) \cdot dy - E_x(x, y + dy, z) \cdot dx - E_y(x, y, z) \cdot dy + E_x(x, y, z) \cdot dx = \frac{\partial E_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial E_x}{\partial y} dx dy$$

soit :

$$\delta\mathcal{C}_{d\Gamma_{xy}} = \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx dy$$

Un étude identique avec des contours respectivement parallèles à  $yOz$  et  $xOz$  conduirait à :

$$\begin{cases} \|(yOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{yz}} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dy dz \\ \|(xOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{xz}} = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dx dz \end{cases}$$

En outre, nous savons que pour chacun de ces contours fermés, la circulation est nulle soit :

$$\delta\mathcal{C} = \oint_{\forall d\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Ainsi, les 3 circulations précédentes sont nulles :

$$\begin{cases} \|(xOy) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{xy}} = \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx dy = 0 \\ \|(yOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{yz}} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dy dz = 0 \\ \|(xOz) \rightarrow d\mathcal{C}_{d\Gamma_{xz}} = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dx dz = 0 \end{cases}$$

On pose alors un nouvel opérateur vectoriel appelé "rotationnel" du champ  $\vec{E}$ , et dont le résultat est un vecteur, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx dy = \underbrace{\vec{rot} \vec{E} \cdot dx dy \vec{e}_z}_{=d\vec{s}_z} = 0 \\ \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dy dz = \underbrace{\vec{rot} \vec{E} \cdot dy dz \vec{e}_x}_{=d\vec{s}_x} = 0 \\ \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dx dz = \underbrace{\vec{rot} \vec{E} \cdot dx dz \vec{e}_y}_{=d\vec{s}_y} = 0 \end{array} \right.$$

et donc d'expression :

$$\vec{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ainsi, il vient l'équation locale en coordonnées cartésiennes traduisant la nullité de la circulation de  $\vec{E}$  sur un contour fermé :

**PROPRIÉTÉ - (II.1) - 3:**

Dans le cas d'un champ électrostatique  $\vec{E}$ , on a en tout point de l'espace :

$$\vec{rot} [\vec{E}(M)] = \vec{0} \tag{X.3}$$

*formulation locale de la conservation de la circulation de  $\vec{E}$   
ou équation de Maxwell-Faraday de la statique*

**REMARQUE - (II.1) - 2:**

En coordonnées cartésiennes **uniquement**, on peut écrire le rotationnel à l'aide de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  en remarquant que :

$$\vec{rot} [\vec{E}(M)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M)$$

## II.2 Conséquence : le théorème de Stokes-Ampère

Rappelons l'expression de la circulation sur le contour  $\llcorner(xOy)$  :

$$\delta\mathcal{C}_{d\Gamma_{xy}} = \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx dy = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\hat{S}}_z$$

En intégrant sur un contour fermé macroscopique  $\Gamma \llcorner(xOy)$  de surface  $S$  s'appuyant sur le contour, on obtient :

$$\mathcal{C} = \iint_{S/\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\hat{S}}$$

soit finalement en détaillant l'expression de la circulation :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\hat{l}} = \iint_{S/\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}} [\vec{E}] \cdot \overrightarrow{d\hat{S}}$$

On peut généraliser ce résultat à tout champ de vecteur avec :

**PROPRIÉTÉ - (II.2) - 4:**

Tout champ de vecteur  $\vec{P}(x, y, z)$  vérifie la relation suivante pour un contour fermé  $\Gamma$  sur lequel s'appuie une surface quelconque  $S$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot \overrightarrow{d\hat{l}} = \iint_{S/\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}} [\vec{P}] \cdot \overrightarrow{d\hat{S}} \quad (\text{Théorème de Stokes-Ampère})$$

## II.3 Complément : signification du rotationnel (le radeau de la méduse)

En live!!!

## III Les équations locales du potentiel

### III.1 Préliminaire : l'opérateur Laplacien

#### a - Laplacien scalaire

On définit, en coordonnées cartésiennes<sup>1</sup>, l'opérateur laplacien scalaire d'une fonction scalaire  $f(x, y, z)$  de classe  $\mathcal{C}^2$  par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{X.4})$$

1. on se reportera au fascicule distribué en début d'année pour les expressions dans les autres systèmes de coordonnées



REMARQUE - (III.1) - 3:

On notera la relation importante :

$$\Delta f = \operatorname{div} [\overrightarrow{\operatorname{grad}} f]$$

**Exercice de cours:** (III.1) - n° 2 Démontrer cette dernière relation.

RÉPONSE :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\overrightarrow{\operatorname{grad}} f] &= \frac{\partial}{\partial x} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{e}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{e}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{e}_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \Delta f \end{aligned}$$

**b - Laplacien vectoriel**

L'opérateur laplacien vectoriel appliqué à un champ de vecteur  $\vec{P} = (P_x(x, y, z), P_y(x, y, z), P_z(x, y, z))$  correspond simplement à un vecteur dont les coordonnées sont les laplaciens scalaires de chaque coordonnée du champ de vecteur, soit :

$$\Delta \vec{P} = [\Delta P_x] \cdot \vec{e}_x + [\Delta P_y] \cdot \vec{e}_y + [\Delta P_z] \cdot \vec{e}_z \quad (\text{X.5})$$

**III.2 Potentiel en espace chargé : l'équation de Poisson - signification**

**a - Formulation**

On a défini un peu plus haut la formulation locale du théorème de Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

or dans le cas d'un champ électrostatique, la relation entre le champ et le potentiel est :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V(M)$$

donc :

$$\operatorname{div} [-\overrightarrow{\operatorname{grad}} V(M)] = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

que l'on retient finalement sous la forme de l'équation de Poisson du potentiel scalaire :

**PROPRIÉTÉ - (III.2) - 5:**

Le potentiel électrostatique  $V$  est relié à ses sources, c'est à dire la densité volumique de charge  $\rho$  par l'équation de Poisson :

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{X.6})$$

**Solutions** : on admettra sans démonstration la forme des solutions de l'équation de Poisson du potentiel scalaire électrostatique  $V$  :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{charges}} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$

Dans le cas d'une répartition bidimensionnelle des charges de densité surfacique  $\sigma(P)$  le potentiel devient :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{charges}} \frac{\sigma(P)}{PM} dS$$

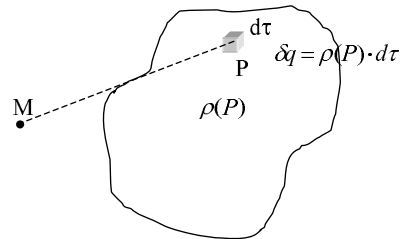


FIGURE X.3 – Potentiel engendré par une distribution volumique

et enfin dans le cas d'une répartition unidimensionnelle (filiforme) de densité linéique  $\lambda(P)$  :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{charges}} \frac{\lambda(P)}{PM} dl$$

**b - Exemple de résolution : la diode à vide**

On considère une **diode à vide** 1D constituée de deux électrodes planes distantes de  $a$ , supposées de dimensions infinies et portées à des potentiels respectifs  $V = 0$  pour la cathode et  $V(a) = V_a > 0$  pour l'anode. La cathode est chauffée de sorte que des électrons s'en échappent par et emplissent l'espace entre les électrodes que l'on caractérise par la densité volumique de charge  $\rho(x)$ .

Le problème étant à 1D (axe  $[Ox]$ ), l'équation de Poisson prend la forme simple suivante :

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2V(x)}{dx^2} + \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = 0$$

EN LIVE : On montrera que :  $\rho(x) \sim V(x)^{-\frac{1}{2}}$

Posons une solution de type  $V = kx^\alpha$  où  $k$  et  $\alpha$  sont des constantes et injectons la dans l'équation de Poisson qui devient alors :

$$k\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} = \frac{cste}{\epsilon_0} V^{-\frac{1}{2}} = cste' \cdot V^{-\frac{1}{2}} = cste' \cdot k^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{\alpha}{2}}$$

On en conclut que  $\alpha = \frac{4}{3}$  soit :

$$V = k \cdot x^{\frac{4}{3}}$$

On peut également dégager l'expression de la différence de potentiel  $U = V(a) - V(x = 0) = V(a)$  entre les deux électrodes en intégrant le potentiel  $V$  :

$$U = k \cdot a^{\frac{4}{3}}$$

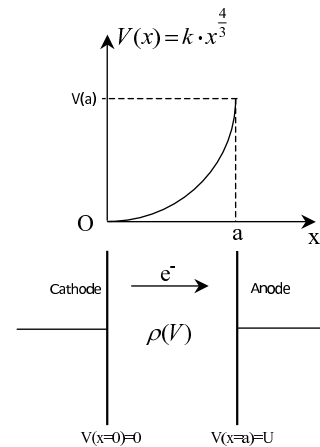


FIGURE X.4 – Potentiel dans une diode à vide 1D

AUTRE EXEMPLE DE RÉOLUTION FORMELLE SIMPLE : cf TD exercice sur les colloïdes (modèle de Yukawa)

### III.3 Potentiel en espace vide : l'équation de Laplace

#### a - Formulation - existence et importance du potentiel-unicité

La démarche naturelle de l'électrostatique est la recherche du champ électrique engendré par une distribution de charges puisque ce dernier est à l'origine de la force ressentie par une charge d'essai, et que cette force est mesurable expérimentalement. Cependant, on peut formuler tout problème d'électrostatique en terme de **recherche de potentiel** puisque la relation champ-potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

permet de remonter immédiatement au champ.

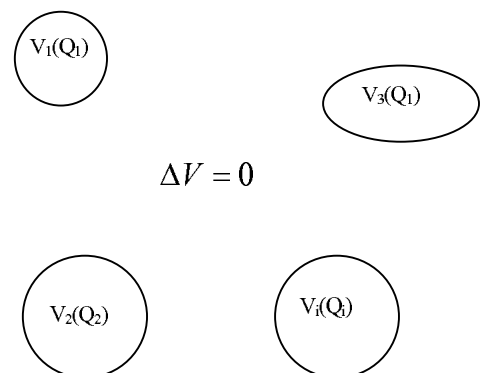
En outre, le potentiel électrostatique est solution de l'équation de Poisson  $\Delta V(\vec{r}) + \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = 0$ .

Dans le cas où la charge volumique est nulle, i.e. en espace **localement vide de charge**, l'équation de Poisson devient l'équation de Laplace :

$$\Delta V(\vec{r}) = 0 \quad \text{Equation de Laplace du potentiel électrostatique}$$

soit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (X.7)$$



Considérons un espace vide de charge, mais comportant par exemple une distribution de  $N$  conducteurs chargés dans l'espace et imposant un potentiel sur leur surface; le problème électrostatique consiste donc à dégager une fonction  $V(x, y, z)$  solution de l'équation de Laplace et **satisfaisant aux conditions aux limites existant à la surface de ces conducteurs**  $CL = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_i, \dots\}$ .

**NB :** on montre (ancien programme) qu'un conducteur à l'équilibre est un volume isopotentiel

**PROPRIÉTÉ - (III.3) - 6:**

On montre que le potentiel  $V(x, y, z)$ , solution de l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$  avec conditions aux limites données sur les conducteurs :

- existe toujours.
- est unique

$$\Delta V(x, y, z) = 0 + C.L. \Leftrightarrow \exists V(x, y, z) \text{ unique}$$

**b - Exemple de résolution analytique possible : le cas d'un condensateur cylindrique**

Les armatures d'un condensateur cylindrique sont deux cylindres coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_2$  et de hauteur  $h$ . Par souci de simplification, on supposera la hauteur  $h$  très grande face aux rayons  $R_1$  et  $R_2$  ce qui revient concrètement à négliger les effets de bord dans ce problème.

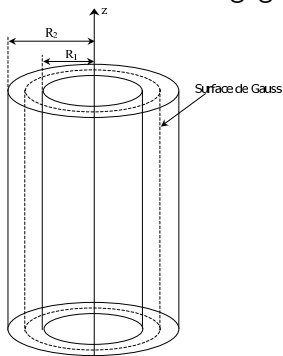


FIGURE X.5 - Condensateur cylindrique

L'étude des invariances et des symétries conduit à une expression de la forme suivante pour le champ électrique régnant entre les deux armatures :

$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(r) = -\vec{grad}V = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)} = \begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = V(r)}$$

**HYPOTHÈSE :** la donnée du problème est la valeur des potentiels aux limites  $V_1 = V(R_1)$  et  $V_2 = V(R_2) \Rightarrow$  calcul de la capacité par méthode n°2.

L'équation de Laplace valable dans l'espace entre armatures s'écrit :

$$\Delta V = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} V(r) \right) = 0$$

qui conduit à  $V(r) = K_1 \ln(r) + K_2$

La traduction des conditions aux limites donne :  $\begin{cases} V(R_1) = K_1 \ln R_1 + K_2 = V_1 \\ V(R_2) = K_1 \ln R_2 + K_2 = V_2 \end{cases}$

d'où après calcul : 
$$\begin{cases} K_1 = \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \\ K_2 = V_2 - \frac{(V_1 - V_2) \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \end{cases}$$
 et ainsi : 
$$V(r) = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2}$$

c - Exemple de méthode numérique de résolution de l'équation de Laplace : méthode des différences finies appliquée au condensateur plan

cf document en "slide" + code Python.

## IV Analogie électrostatique - gravitation

### IV.1 Grandeurs analogues - Champ de gravitation

La loi de force de Coulomb et la loi de force de la gravitation sont toutes les deux des lois en  $\frac{1}{r^2}$ . On parle de champ de force newtonien :

<p>FORCE DE COULOMB : entre 2 charges <math>q_A</math> et <math>q_B</math></p> $\vec{F}_{Coul_{A/B}} = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \cdot \frac{\vec{AB}}{AB}$	<p>FORCE DE GRAVITATION : entre 2 masses <math>m(A)</math> et <math>M(B)</math></p> $\vec{F}_{grav_{A/B}} = -G \frac{Mm}{AB^2} \cdot \frac{\vec{AB}}{AB}$
---	---

La comparaison entre ces deux lois similaires permet de dégager les premières analogies suivantes :

	Electrostatique	Gravitation
Cste caractéristique	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Acteur	charge $q$	masse $m$
Champ caractéristique 1 acteur	$\vec{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$	$\vec{G}_m = -G \frac{m}{r^2} \cdot \vec{u}$
Champ caractéristique n acteurs	$\vec{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$	$\vec{G}_n = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$
Champ caractéristique distrib. contin.	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P) \cdot d\tau}{PM^2} \cdot \vec{u}_{PM}$	$\vec{G} = -G \iiint \frac{\rho(P) \cdot d\tau}{PM^2} \cdot \vec{u}_{PM}$

### IV.2 Potentiel de gravitation

$$\vec{F}_m = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M_i A^2} \frac{\vec{M_i A}}{M_i A} = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i^2} \frac{\vec{R}_i}{R_i}$$

Considérons un ensemble de points matériels  $(M_1, \dots, M_n)$  de masses  $(m_1, \dots, m_n)$  et de positions  $(\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}, \dots, \vec{r}_n = \overrightarrow{OM_n})$ .

Supposons un point matériel  $A$  de masse  $m$  de position  $\vec{r}$  plongé dans cette distribution de masses ponctuelles. La force de gravitation ressentie par  $m$  est :

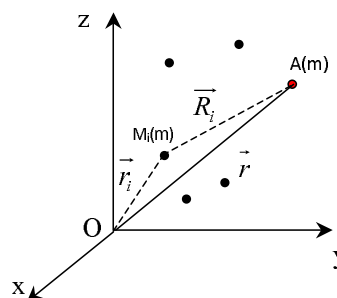


FIGURE X.6 – Potentiel en A d'une distribution de charges

en posant  $\vec{R}_i = \overrightarrow{M_i A} = \overrightarrow{M_i O} + \overrightarrow{O A} = \vec{r} - \vec{r}_i$

Calculons le travail élémentaire de la résultante de gravitation sur la masse  $m$  dépensé lors d'un déplacement  $\vec{dr}$  :

$$\delta W = \vec{F}_m \cdot \vec{dr} \stackrel{d\vec{r}_i=0}{=} \vec{F}_m \cdot d\vec{R}_i = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i \vec{R}_i}{R_i^2} \cdot d\vec{R}_i$$

soit :

$$\delta W = -Gm \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i^2} \cdot dR_i = +Gm \sum_{i=1}^n m_i d\left(\frac{1}{R_i}\right) = md \left( \sum_{i=1}^n \frac{+Gm_i}{R_i} \right)$$

RAPPEL : travail de la force de Coulomb :  $\delta W_{Coul} = -qdV$

En exploitant l'analogie  $q \leftrightarrow m$  il vient  $\delta W_{grav} = -md\Phi$  et on en déduit la différentielle du potentiel de gravitation  $\Phi$  :

$$d\Phi = d \left( - \sum_{i=1}^n \frac{+Gm_i}{R_i} \right)$$

soit finalement le potentiel de gravitation en posant nulle la constante d'intégration :

A RETENIR :

$$\Phi = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{R_i} \stackrel{\text{Analogie}}{\leftrightarrow} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i}$$

### IV.3 Théorème de Gauss

#### a - Enoncé

On dégage le théorème de Gauss de la gravitation en exploitant l'analogie précédente et en notant que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = -G \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\epsilon_0} \leftrightarrow -4\pi G}$$

Il vient alors :

A RETENIR :

**PROPRIÉTÉ - (IV.3) - 7:**

Le flux du champ de gravitation  $\vec{G}$  engendré par une distribution quelconque de masses sur une surface fermée  $S$  quelconque de l'espace vaut :

$$\Phi = \oiint_S \vec{G} \cdot \vec{dS} = -4\pi G \sum_i m_{i_{int}} = -4\pi G M_{int} \quad \text{cas des distributions discrètes}$$

Ce résultat peut-être immédiatement étendu au cas des distributions continues de masse, caractérisées par la masse volumique  $\rho_m(M)$  :

$$\Phi = \oiint_S \vec{G} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \rho_m(M) \cdot d\tau = -4\pi G M_{int} \quad \text{cas des distributions continues}$$

en appelant  $\rho$  la masse volumique dans le volume  $V$  de frontière la surface  $S$ .

**b - Exemple d'exploitation : champ d'une distribution sphérique homogène**

Considérons une masse  $M$  sphérique de rayon  $R$ . On recherche le champ de gravitation  $\vec{G}(r)$  en tout point de l'espace.

- Par raison de symétrie et invariance, on a :  $\vec{G} = G(r) \cdot \vec{e}_r$
- Appliquons le théorème de Gauss à la sphère  $S$  de rayon  $r$ . 2 cas à envisager :
  - ◊ CAS  $r > R$  (POINTS EXTÉRIEURS À LA SPHÈRE) :

$$\iint_S \vec{G} \cdot \vec{dS} = \iint_S G(r) \cdot dS = 4\pi r^2 G(r) = -4\pi G \underbrace{M_{int}}_{=M}$$

donc :

$$\vec{G}(r > R) = -\frac{GM}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

- ◊ CAS  $r < R$  (POINTS INTÉRIEURS À LA SPHÈRE) :

$$\iint_S \vec{G} \cdot \vec{dS} = \iint_S G(r) \cdot dS = 4\pi r^2 G(r) = -4\pi G \iiint_{V/S} \underbrace{\rho(r)}_{=\rho_0=cste} \cdot d\tau = -4\pi G \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$$

donc

$$\vec{G}(r < R) = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 Gr \cdot \vec{e}_r = -GM \frac{r}{R^3} \cdot \vec{e}_r$$

#### IV.4 Synthèse locale de l'analogie

L'analogie *électrostatique*  $\leftrightarrow$  *gravitation* peut être prolongée localement, soit :

- LIEN CHAMP-POTENTIEL :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \leftrightarrow \vec{G}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$$

**Exemple d'exploitation** : détermination du potentiel électrostatique de la distribution de charge sphérique homogène précédente :

$$\vec{G}(r > R) = -\overrightarrow{\text{grad}}[\Phi]$$

soit :

$$G(r > R) \cdot \vec{e}_r = -\frac{GM}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{d\Phi}{dr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad d\Phi(r) = -G(r) \cdot dr$$

qui donne après intégration et en posant la constante d'intégration nulle par convention :

$$\Phi(r > R) = -\frac{GM}{r}$$

**Exercice de cours:** (IV.4) - n° 3 Sachant que le potentiel est continue en  $r = R$ , montrer que :

$$\Phi(r < R) = \frac{GM}{2R} \left( \frac{r^2}{R^2} - 3 \right)$$

- FORME LOCALE DU THÉORÈME DE GAUSS :

$$\text{div} \left[ \vec{E}(M) \right] = \frac{\rho_{elec}(M)}{\epsilon_0} \leftrightarrow \text{div} \left[ \vec{G}(M) \right] = -4\pi G \rho_m(M)$$

- EQUATION DE POISSON :

Enfin, on peut dégager l'équation de Poisson de la gravitation par la même démarche que celle adoptée en électrostatique, soit :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}[\Phi] \\ \text{div} \vec{G} = -4\pi G \rho_m \end{array} \right\} \implies \text{div} \left[ -\overrightarrow{\text{grad}}[\Phi] \right] = -4\pi G \rho_m \implies \Delta \Phi(M) - 4\pi G \rho_m(M) = 0$$